

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Литература

1. Алексеев Д.В. Введение в компьютерное моделирование физических задач:Использование - М.: Ленанд, 2019. - 272 с.
2. Боев В.Д. Имитационное моделирование систем : учеб. пособие для прикладного бакалавриата // М. : Издательство Юрайт, 2023. 253 с. (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). Режим доступа: <http://simulation.su/uploads/files/default/2017-uch-posob-boev.pdf>.
3. Гербеков Х.А., Башкаева О.П. Место математического и компьютерного моделирования в системе современного общего образования // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2022. Том 14. С.179 Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/mesto-matematicheskogo-i-kompyuternogo-modelirovaniya-v-sisteme-sovremennogo-obshchego-obrazovaniya>
4. Горностаева Т.Н. Компьютерное моделирование [Текст]:учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 Физико- математическое образование / Т. Н. Горностаева. М-во образования и науки Российской Федерации, Дальневосточный федеральный ун-т. – Владивосток, Изд. Дальневосточный федеральный ун-т, 2033. - 116 с.
5. Заварыкин В.И. Численные методы [Текст]: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических вузов / В.И. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик . – М.: Просвещение, 2018. – 158с.
6. Овечкин, Г.В. Компьютерное моделирование: Учебник / Г.В. Овечкин. - М.: Академия, 2018. - 432 с.
7. Пермьяков П.С., Репин О.И. Математическое моделирование физических процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2018. – № 6.; URL: <http://eduherald.ru/ru/article/view?id=19442> (дата обращения: 14.08.2024).
8. Пуанкаре А.О. О науке: Пер. с фр./Под ред. Л. С. Понтрягина.— 2-е изд., стер.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2019.— 736 с. Режим доступа: <http://ilib.mccme.ru/Poincare/O-nauke.htm>
9. Пак Н.И. Компьютерное моделирование в примерах и задачах: /Учебное пособие. - Красноярск, КГМУ, 2020. – 120с. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26742174>

Понятие модели. Основные этапы моделирования.

Вопросы:

1. Основные понятия.
2. Подход к математическому моделированию процессов.
3. Методы решения математических задач.
4. Оптимизационная модель. Решение задачи линейного программирования графическим способом.

Слово «модель» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «образец», это понятие используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Термин «модель» стал востребован в XX веке в связи с появлением компьютеров, хотя сами модели используются человечеством с незапамятных времен.



Древние модели - наскальные рисунки

I этап Материя (живая и неживая)



II этап Мышление человека

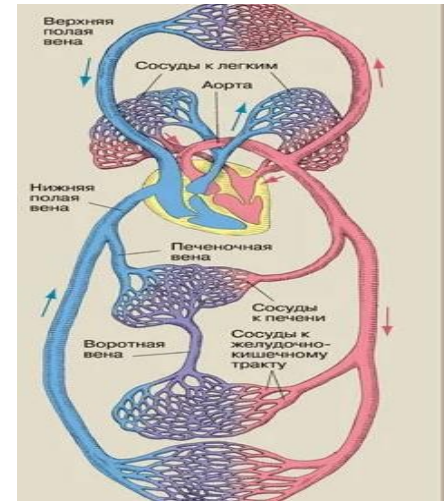


III этап Неживая материя (компьютер)

Схема отображения мира



Модель Золотого моста



Модель кровообращения



Самолет в аэродинамической трубе

Чтобы рассчитать путь, пройденный телом, движущимся с начальной скоростью V и ускорением a за время t , пользуются уравнением:

$$S = \underline{Vt} + \frac{at^2}{2} \quad (1)$$

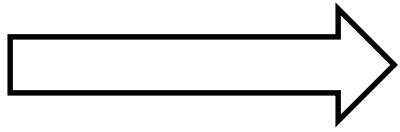
Уравнение (1) – модель равноускоренного движения тела.

Во всех рассмотренных случаях некоторый объект, система или процесс **сопоставляются** с другим объектом, его заменяющим, а именно:

- Реальный мост – с макетом из картона;
- Система кровообращения – со схемой на плакате;
- Летящий самолет – с самолетом в аэродинамической трубе;
- Процесс движения тела – с уравнением.

Во всех случаях ***одно или несколько свойств сохраняются при переходе от реального объекта к его модели:***

- Макет меньше моста, но сохраняет его форму и пропорции;
- Схема на плакате, на первый взгляд, не имеет ничего общего с системой кровообращения человека, но позволяет судить, откуда и куда течет венозная и артериальная кровь в теле человека;
- Самолет в аэродинамической трубе не летит, но испытывает такие же физические нагрузки, что и летящий самолет;
- Уравнение (1) тоже визуально не имеет ничего общего с процессом движения тела, но позволяет определить путь, пройденный телом в любой момент времени.



моделей без оригиналов не существует

Оригиналами моделей могут быть:

Объекты (ракета, человек, атом, лицо, галактика, планета, животное, здание, космическое тело).

Процессы (изменение климата, война, спад экономики, инфляция, эпидемия, переговоры, судебный процесс).

Явления природы (землетрясение, цунами, северное сияние, снегопад, град, извержение вулкана, молния, гроза).

Для чего нужны модели?

- Конечно, пользуясь чертежами (это тоже модели), можно построить мост и без макета. Но, он может по каким-то параметрам не устраивать заказчика и его пришлось бы перестраивать. Поэтому, ***целесообразнее с точки зрения здравого смысла, сначала построить макет и изменять в случае необходимости именно его, а не переделывать уже построенный.***
- Для демонстрации тока крови может использовать подробный анатомический атлас или вообще живого человека, но, обилие ненужных подробностей в атласе или на живом человеке будет отвлекать от главного – направления движения тока венозной и артериальной крови. В данном случае, ***использование модели - плаката делает объяснение темы более наглядным, чем показ тока крови на живом человеке или атласе.***
- Самолет новой конструкции тоже можно сразу запустить в полет, но, если в нем есть недоделки, он может потерпеть аварию, а в аэродинамической трубе при первых признаках аварийной ситуации силовые установки, создающие реальные условия полета, можно просто выключить. Значит, ***модель самолета в аэродинамической трубе нужна для проведения серии более безопасных и дешевых испытаний.***
- Для того, чтобы узнать путь, пройденный телом за время t , можно всякий раз делать замеры времени, скорости и расстояния, но это довольно трудоемкий процесс, причем измерения не будут отличаться высокой точностью, поэтому ***быстрее и точнее использовать для таких расчетов модель – уравнение.***

Почему эту информацию нельзя получить от самого оригинала?

ПРИЧИНЫ:

1. Оригинал не существует в настоящее время (питекантропы, динозавры, древний Рим, древний Египет) или вообще не существовал.
2. Исследование оригинала дорого или опасно (ядерные испытания, черные дыры, влияние невесомости на здоровье человека, воздействие холода на человеческий организм, исследование недр Земли, измерение температуры ядра Земли – невозможность добраться).
3. Исследование оригинала очень сложно (Галактика – очень большие размеры, ядро атома – очень малые размеры, реактивное движение – очень быстрый процесс, рост коралла – очень медленный процесс).
4. Исследование только отдельных свойств оригинала (предельная грузоподъемность моста, предельно допустимая скорость автомобиля, температура плавления пластика).

Моделирование – это научный прием, метод изучения, познания реального окружающего мира.

Процесс моделирования включает следующие задачи:

- ✓ реальный изучаемый объект (физическая система, процесс, явление), называемый **оригиналом**, замещается его **моделью** (физическим или абстрактным объектом);
- ✓ модель воспроизводит (имитирует) те свойства и характеристики оригинала, которые существенны для достижения поставленной цели моделирования (для решения конкретной задачи);
- ✓ над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах объекта – оригинала.

Математическое моделирование предполагает описание исследуемых явлений, процессов, систем различной физической природы языком математических соотношений.

Фундаментальное свойство моделей

Построение модели всегда связано с какой-либо задачей, решаемой человеком. Только задача позволяет ограничить множество свойств реального объекта, процесса или явления при построении его модели.

Задача 1:

Определить долю городских и сельских студентов на 3 курсе специальности 09.03.01.

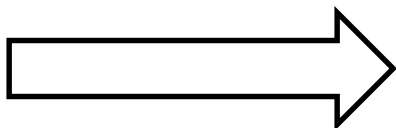
№	ФИО студента	Адрес проживания до поступления в ВУЗ	Город (Г), село (С), деревня (Д)
1	Акулов Александр Фёдорович	Краснодар, Ленина 5-22	Г
2	Багандов Максим Владимирович	Усть-Лабинск, Ушакова 13-8	Г
3	Бондарь Тимур Павлович	Хороль, Францева 18	С
...	...	...	
29	Хаванский Виталий Александрович	Яковлевка, Ленина 35	Д

Модель объекта «Множества студентов 1 курса»

Задача 2:

Определить долю студентов специальности 09.03.01 3 курса, успешно сдавших весеннюю сессию 2 курса

№	ФИО студента	Базы данных	Алгебра	Физ-ра	
1	Акулов Александр Фёдорович	н/яв	4	4	У
2	Багандов Максим Владимирович	3	3	4	н/зачтено
3	Бондарь Тимур Павлович	4	5	4	н/яв
....	...				
29	Хаванский Виталий Александрович	5	5	5	зачтено



1. Для каждого объекта – оригинала можно построить множество моделей, связанных с решением различных задач.

2. Так как при создании модели отбрасываются свойства, не важные для решаемой задачи, то модель всегда беднее оригинала. Это ее фундаментальное свойство.

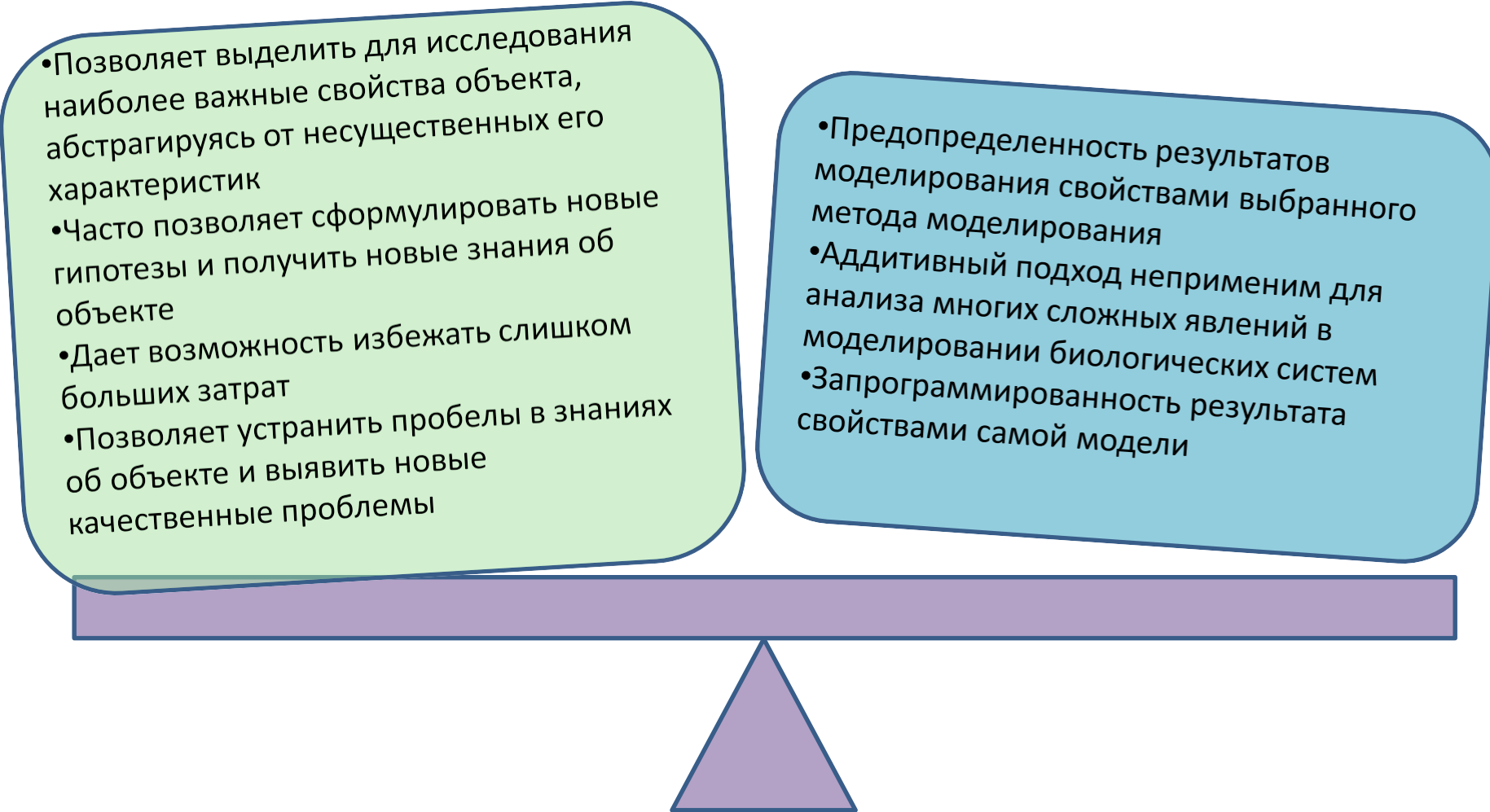
Процесс создания математической модели



Основные этапы моделирования



Достоинства и недостатки

- 
- Позволяет выделить для исследования наиболее важные свойства объекта, абстрагируясь от несущественных его характеристик
 - Часто позволяет сформулировать новые гипотезы и получить новые знания об объекте
 - Дает возможность избежать слишком больших затрат
 - Позволяет устранить пробелы в знаниях об объекте и выявить новые качественные проблемы

- Предопределенность результатов моделирования свойствами выбранного метода моделирования
- Аддитивный подход неприменим для анализа многих сложных явлений в моделировании биологических систем
- Запрограммированность результата свойствами самой модели

Задача линейного программирования (ЗЛП) в общем случае формулируется следующим образом:

Определить максимум (минимум) целевой функции $F_{\max(\min)}$ при заданной системе ограничений (2) и граничных условий (3):

$$F_{\max}(\min) = A_1 * X_1 + A_2 * X_2 + \dots + A_n * X_n \quad (1)$$

$$\begin{cases} B_{11}*X_1+B_{12}*X_2+...+B_{1n}*X_n \leq C_1 \\ B_{21}*X_1+B_{22}*X_2+...+B_{2n}*X_n \leq C_2 \\ \\ B_{n1}*X_1+B_{n2}*X_2+...+B_{nn}*X_n \leq C_n \end{cases} \quad (2)$$

$$X_i \geq 0, i=1 \dots n \quad (3)$$

Графическим методом решается стандартная задача линейного программирования:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq \geq b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Алгоритм решения задач линейного программирования графическим методом:

1. Осуществляем построение области допустимых решений, используя систему ограничений.
2. Если область допустимых решений является непустым множеством, строим вектор-направление, координаты которого являются коэффициентами целевой функции.
3. На том же чертеже рисуем линии уровня, расположенные под прямым углом к вектору-направления.
4. Сдвигаем линию уровня параллельно самой себе по вектору - направления для задач на $\max$ и противоположно вектору-направление для задач на $\min$.
5. Определяем координаты точек или точки, в которых линии уровня покидают область допустимых значений.

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

1. Случай единственного решения. На рис. 1 точкой минимума является точка A, а точкой максимума - точка B.

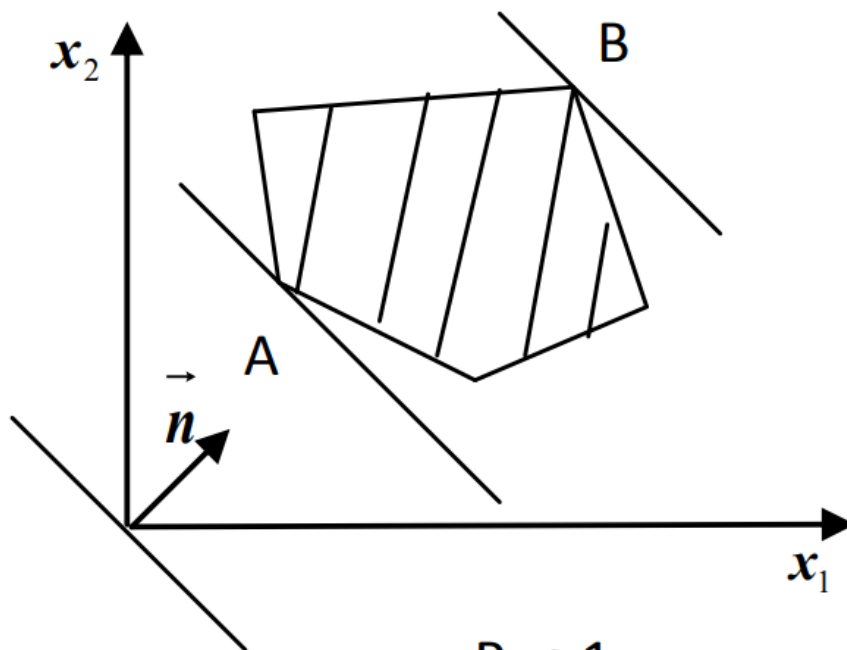


Рис.1

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

2. Случай бесконечного множества решений (альтернативный оптимум). На рисунке 2 максимум достигается во всех точках отрезка BC.

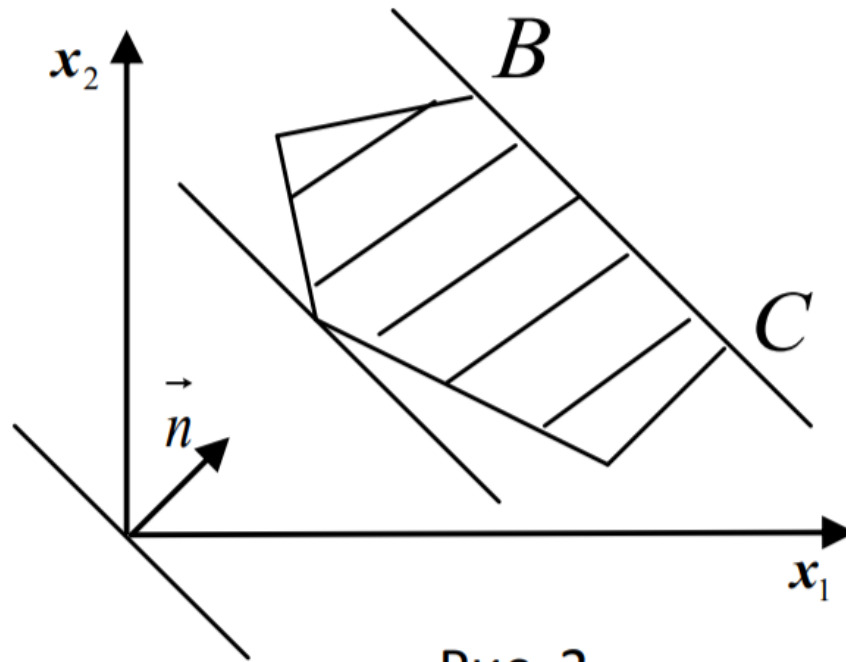
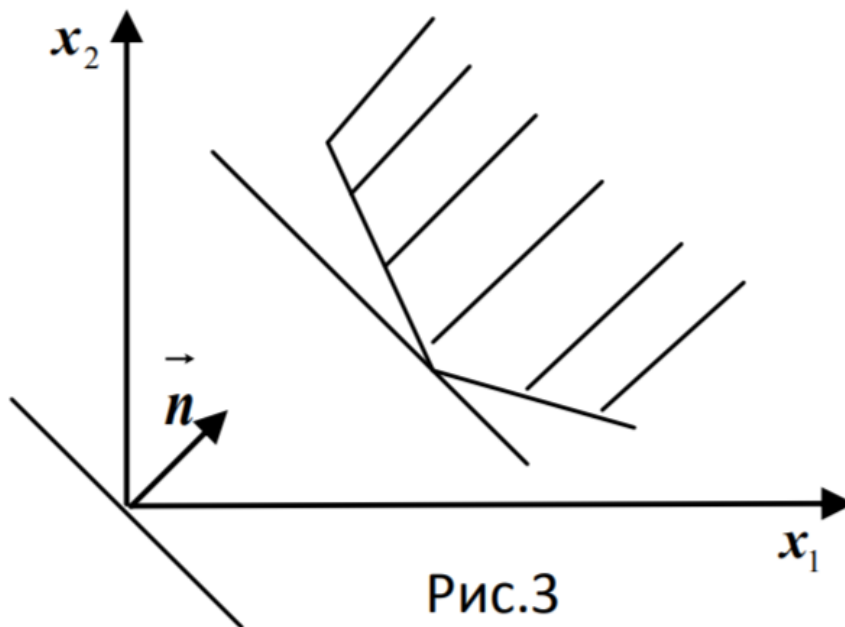


Рис. 2

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

3. Случай неограниченности целевой функции. На рисунке 3 точки максимума не существует



При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

4. Случай несовместности. На рисунке 4 – случай отсутствия решения, так как область допустимых значений является пустым множеством.

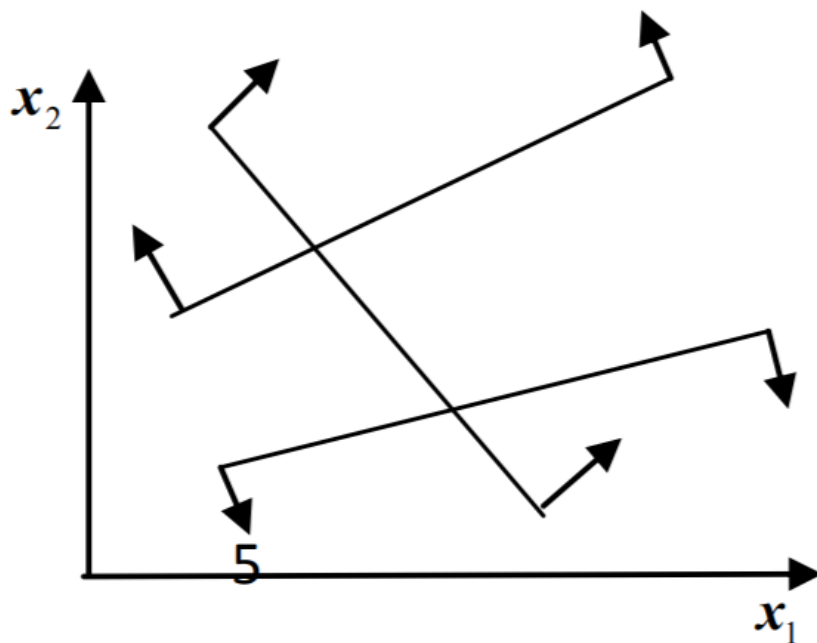


Рис.4

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

1. Случай единственного решения. На рис. 1 точкой минимума является точка А, а точкой максимума - точка В.

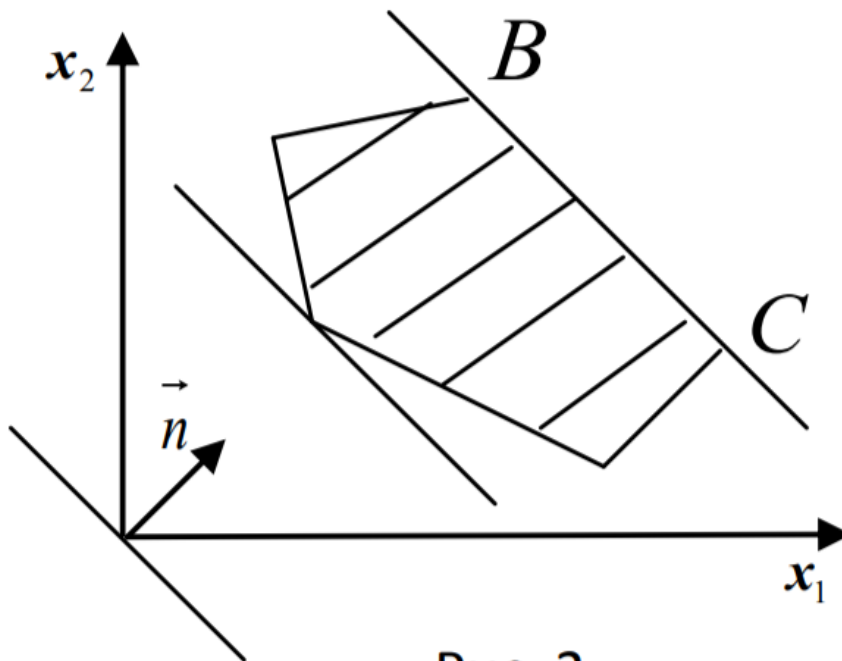


Рис. 2

Пример. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 1. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 3x_1 - x_2 \rightarrow \min \\
 2. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max \\
 3. \quad & \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 5x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\
 4. \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \underline{\min} \\
 5. \quad & \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \underline{\max} \\
 7. \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 - 5x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \underline{\max} \\
 9. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \underline{\max} \\
 6. \quad & \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \underline{\max} \\
 8. \quad & \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \geq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Z = -3x_1 - x_2 \rightarrow \underline{\min} \\
 10. \quad & \begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$